MA-2112

Repaso 1^{er} Parcial (problemas seleccionados de exámenes anteriores)

1 Continuidad-Diferenciabilidad

1. Bosqueje la gráfica de $f(x,y)=e^{x^2+3y^2}$.

2. Sea $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\ln(x+y)$ y D el dominio de f. Es D abierto? cerrado? Justifique su respuesta.

3. Sea la función definida por
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
a) Demuestre que f es continua en (0,0).
b) Halle un vector unitario $\overrightarrow{v}$ tal que $f'((0,0),\overrightarrow{v})=1/8$.
c) Determine si f es diferenciable en (0,0).

4. Sea $f(x,y)=\begin{cases}(x^2-y^2)\dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ 0 & \text{si } x=y\end{cases}$
a) Determine si existen las derivadas direccionales de f en (0,0)
b) Calcular (si existen) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$

5. Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^{35}}{(y^7-x^3)^5} & \text{si } y^7\neq x^3\\ 0 & \text{si } y^7=x^3\end{cases}$
Es f continua en el orígen?, Justifique.

6. Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$
a) Es continua en $(0,0)$?
b) Diferenciable en $(0,0)$?

7. Es $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2+4y^8}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$
a) Continua en $(0,0)$?
b) Diferenciable en $(0,0)$?

2 Planos Tangentes, Regla de la Cadena, Derivación Implícita

1. Las Ecuaciones
$x=(2+\cos u)\operatorname{sen}v \quad y=(2+\cos u)\cos v$
$z=\operatorname{sen}u$
Donde $0\leq u\leq\pi \quad 0\leq v\leq 2\pi$ Definen la Superficie $S=\{(x,y,z)/z-f(x,y)=0\}$ Siendo (x,y,z) Coordenadas cartesianas, Determine la escuacón algebraica (en coordenadas cartesianas) del plano tangente a S en el punto $(\frac{1}{2}+\sqrt{2},\frac{1}{2}+\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

2. Considere $S=\{(x,y,z)/x^2+2y^2-3z^2+3yz=2\}$
a) Encuentre el plano tangente a S en el punto $P=(0,1,0)$
b) Encuentre todos los puntos de S en los cuales el plano tangente es paralelo al plano $x+y=0$.

3. Considere la ecuación diferencial ($u(x,y)$ de clase C^2) $\quad u_{xx}+5u_{xy}+6u_{yy}=e^{x+y}$ Demuestre que si $f,g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ son de clase C^2 entonces
$u(x,y)=f(y-2x)+g(3x-y)+\frac{1}{12}e^{x+y}$ Satisface la ecuación diferencial.

4. Sea $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ una función diferenciable; Considere la superficie de ecuación $z=xg(\frac{y}{x})$. Demostrar que el plano tangente a esa superficie en el punto (x_o,y_o,z_o) con $x_o\neq 0$ pasa por el orígen de coordenadas.

5. Hallar el plano tangente y un vector normal unitario al Hiperboloide de ecuación $x^2+y^2-z^2=18$ en $(3,5,-4)$.

6. La Ecuación $x+z+(y+z)^2=6$ define z como función implícita de x,y. Sea $z=f(x,y)$; Hallar $z_x\ z_y\ z_{xy}$ en términos de (x,y,z) y suponiendo f de clase C^2.

7. Sean $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R} \quad g:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2 \quad$ y $h=f\circ g$
Sabemos que:
La ecuación del plano tangente a $z=f(x,y)$ en $(3,2)$ pasa por el orígen.
$Dh_{(0,0,0)}=(1,1,1) \quad g(0,0,0)=(3,2)$
$Dg_{(0,0,0)}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}$
Hallar $h(0,0,0)$.

3 Taylor

1. Sea $g(t)=5t^2-1$ y sea $z=f(x,y)$ definida implícitamente en una vecindad de $(1,0)$ por la ecuación $e^{zx+y}+\operatorname{sen}(zy)=1$. Suponiendo que f es de clase C^2, halle el polinomio de Taylor de segundo orden de la función $h=g\circ f$ en $(1,0)$.

2. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 en $(1,1)$ de $z=f(x,y)$ donde z está implícitamente dada por la ecuación $z^3+yz-xy^2-x^3=0$.

4 Cálculo de Extremos, Multiplicadores de Lagrange

1. Determinar los puntos más cercanos y más alejados del orígen en la superficie
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1\}$.

2. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3xy^2 + 10$

   (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - y^2 - x^2y + 3$

   (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ Tiene f mínimos o máximos globales?

3. Sea $S = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $f(x,y,z) = xy + yz - xz$
a) Demuestre que f tiene un valor constante sobre la intersección de S con el plano $x - y + z = 0$.
b) Halle el mínimo y el máximo absoluto de f sobre S y determine los puntos donde éstos valores son alcanzados.

4. Dada $f(x,y) = 4x^2y + 2xy^2 + xy$
a) Hallar y clasificar los puntos críticos de f
b) Hallar los extremos absolutos de f en el conjunto $D = \{(x,y)/ -1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0\}$.

5. Hallar los extremos absolutos de
$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ en la esfera
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Determinar los extremos globales de
$f(x,y) = x^4 - y^4 - x^2 + y^2$ en el conjunto
$D = \{(x,y)/x = r\cos\theta \quad y = r\text{sen}\theta;$
$-\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4 \quad 0 \leq r \leq 1\}$.

7. (Método de Mínimos Cuadrados)

   (a) Un científico toma una una muestra de valores en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ como resultado de una medición hecha en su experimento. La muestra, $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\ldots(x_n,y_n)$ una vez graficada en el plano cartesiano, hace pensar al científico que la variable y es función de x y la dependencia es lineal (observando que los puntos se aglomeran aproximadamente a lo largo de una línea recta). Entonces decide el científico buscar la función $y = mx + b$ que mejor se aproxime a los datos en el sentido siguiente: La suma del cuadrado de los errores cometidos al evaluar la función en el punto x_i y el valor y_i debe ser mínima.
   Es decir, si $d_i = (y_i - (mx_i + b))^2$ y

$$h(m,b) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

   Lo que el científico busca es el par (m_0, b_0) que minimiza $h(m,b)$ para considerar entonces la función $y = m_0x + b_0$ como una descripción aproximada de lo que está pasando en su experimento.Demuestre que los valores buscados de m y b satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (1)$$

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \qquad (2)$$

   (b) Aplique lo anterior para buscar la línea recta que aproxima mejor (con error cuadrático mínimo) a los siguientes datos:

x	1	2	3	5	7
y	3	2	4	4	10

   (c) Como Ud. sospechará no necesariamente la "mejor" recta será siempre aproximación mas idónea. Por ejemplo, basta considerar el caso en el cual la muestra $(x_1,y_1),\ldots(x_n,y_n)$ se distribuye en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ a lo largo de una curva diferente; por ejemplo, a lo largo de una parábola. Encuentre Ud. el caso en el cual los puntos tengan una dependencia cuadrática, es decir encuentre condiciones sobre a,b,c para que la función $y = ax^2 + bx + c$ tenga error cuadrático mínimo con respecto a una muestra dada.